

Rappel:

$\Leftrightarrow f$ différentiable en $\tilde{x}$: $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \frac{f(x) - f(\tilde{x}) - \langle \nabla f(\tilde{x}), x - \tilde{x} \rangle}{\|x - \tilde{x}\|} = 0$

approximation de f
par polynôme de degré 1,
i.e. "DL d'ordre 1"

$n=2$

$\Leftrightarrow$ plan tangent au graphe de f en $(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))$

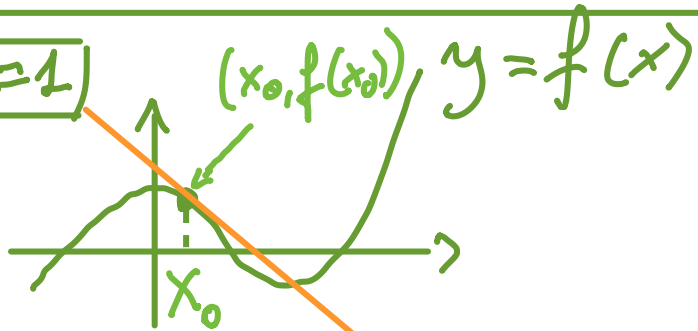
$$z = f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle := P_1(x, y)$$

$$G(f) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y) \} \rightarrow \text{Graphe de } f$$

$$G(P_1) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = P_1(x, y) \} \rightarrow \text{Graphe du "DL d'ordre 1 de } f \text{"}$$

- est un plan (graphe d'une fonction affine)
- est tangent à $G(f)$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y}))$ car P_1 est une "bonne approximation de f "

$n=1$



- est une droite
- est tangent au graphe en $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 4.23 (ii)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1, 1)$$

$$\text{On a } f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4 y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Le plan tangent au graphe de f en $(\tilde{x}, \tilde{y}, f(\tilde{x}, \tilde{y})) = (1, 1, \frac{1}{2})$
est le plan d'équation $z = f(1,1) + (x-1) \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + (y-1) \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

$$z = \frac{1}{2} + (x-1) \cdot \frac{1}{2} + (y-1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$$

$$\leadsto 0 = x + y - 2z - 1$$

Proposition 4.24

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert, $h \in \mathbb{N}^*$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$, $f \in C^{h+1}(D)$

Alors, $\exists r: D \rightarrow \mathbb{R}$ tq

$$r(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0,$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} \frac{r(x,y)}{\|(x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\|^h} = 0 \text{ et}$$

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^h \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^* \\ \alpha + \beta = j}} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(\tilde{x}, \tilde{y}) (x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^\beta + r(x,y)$$

$$= \sum_{j=0}^h \sum_{\alpha=0}^j \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(j-\alpha)!} \frac{\partial^j f}{\partial x^\alpha \partial y^{j-\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{y}) (x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^{j-\alpha} + r(x,y)$$

$\deg \tilde{r} = j$

Où, par convention, $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0 \partial y^0} = f$, $(x - \tilde{x})^0 = 1$, $(y - \tilde{y})^0 = 1$

Définition 4.26 (DL, polynôme de Taylor)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert, $h \in \mathbb{N}^*$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D$ et $f \in C^{h+1}(D)$.

Le polynôme de Taylor de f d'ordre h autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est le polynôme $p: D \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$p(x, y) = \sum_{j=0}^h \sum_{\alpha=0}^j \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{(j-\alpha)!} \frac{\partial_j^j f}{\partial x^\alpha \partial y^{j-\alpha}}(\tilde{x}, \tilde{y}) (x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^{j-\alpha}$$

De plus, l'écriture

$f(x, y) = p(x, y) + r(x, y)$ où r est comme dans la prop. 4.24

s'appelle développement limité de f d'ordre h autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Méthode 4.27

Pour calculer un polynôme de Taylor, on a 3 méthodes :
méthode 1 formule.

méthode 2 procéder par composition.

Si $f(x, y) = \varphi(g(x, y))$ où $g \in C^{h+1}(\mathbb{R}^2)$, $\varphi \in C^{h+1}(\mathbb{R})$

Pour trouver P_h^f , le poly de Taylor de f autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$,
on peut trouver P_h^g , le poly de Taylor de g autour de $(\tilde{x}, \tilde{y})$,
trouver P_h^φ le poly de Taylor de φ autour de $g(\tilde{x}, \tilde{y})$.

composer $P_h^\varphi(P_h^g(x, y))$ et on enlève les termes d'ordre
trop grands, i.e. les termes de la forme $(x - \tilde{x})^\alpha (y - \tilde{y})^\beta$
avec $\alpha + \beta > h$.

Méthode 3 (fonctionne seulement si f est un polynôme)

Procéder par feinte du LoupTM
On remplace toutes les occurrences de x par $(x - \tilde{x} + \tilde{x})$, les occurrences de y par $(y - \tilde{y} + \tilde{y})$.
On développe sans jamais séparer $x - \tilde{x}$ ou $y - \tilde{y}$.

Feinte du LoupTM:
 $\forall x, \forall y, \quad x = x - y + y.$

(par exemple $(x - \tilde{x} + \tilde{x})^2 = (x - \tilde{x})^2 + 2\tilde{x}(x - \tilde{x}) + \tilde{x}^2$)
On enlève les termes de degré trop grands.

Exemples 4.28: (i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x+y)$

Calculons le poly. de Taylor d'ordre 3 de f autour de $(0,0)$

Méthode 1: formule

$$f(x,y) = \sin(x+y)$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\sin(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) = -\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0) = -1$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0) = -1$$

$$P_2(x,y) = f(0,0). \quad \text{1 terme de degré 0}$$

$$+ \frac{1}{1!} \frac{1}{0!} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial y^0}}(0,0) (x-0)^1 (y-0)^0 + \frac{1}{0!} \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) (x-0)^0 (y-0)^1$$

termes de degré 1

$$+ \frac{1}{2!} \frac{1}{0!} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y^0}}(0,0) (x-0)^2 (y-0)^0 + \frac{1}{1!} \frac{1}{1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) (x-0)^1 (y-0)^1$$

$$+ \frac{1}{0!} \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) (x-0)^0 (y-0)^2$$

termes de degré 2

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \frac{1}{0!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) (x-0)^3 (y-0)^0 + \frac{1}{2!} \frac{1}{1!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0) (x-0)^2 (y-0)^1 \\
& + \frac{1}{1!} \frac{1}{2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,0) (x-0)^1 (y-0)^2 + \frac{1}{0!} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) (x-0)^0 (y-0)^3
\end{aligned}$$

termes de degré 3

$$= x+y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3$$

Méthode 2: par composition.

$$f(x,y) = \sin(x+y) = \varphi(g(x,y)) \quad \text{avec}$$

$$g(x,y) = x+y \quad \text{à développer autour de } (0,0)$$

$$\varphi(t) = \sin(t) \quad \text{à développer autour de } g(0,0)=0$$

g est déjà sous la forme d'un polynôme de Taylor.

Le DL de φ est connu, $\varphi(t) = t - \underbrace{\frac{1}{3!} t^3}_{P_3^\varphi(t)} + o(|t|^3)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P_3^\varphi(P_3^g(x, y)) &= (x+y) - \frac{1}{3!} (x+y)^3 \\ &= x+y - \frac{1}{6} (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &= \underbrace{x+y}_{\text{degré}=1} - \underbrace{\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2y - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{6} y^3}_{\text{degré}=3}\end{aligned}$$

Pas de terme d'ordre trop grand $\rightarrow$ on garde tout

$$P_3^f(x, y) = x+y - \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{2} x^2y - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{6} y^3.$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x^2 y - 1}$

Calculons le polynôme de Taylor d'ordre 2 autour de $(1, 1)$

Méthode 2 : composition.

$$f(x, y) = \varphi(g(x, y)) \text{ avec}$$

$$g(x, y) = x^2 y - 1 \quad \text{à développer autour de } (1, 1)$$

$$\varphi(t) = e^t \quad \text{à développer autour de } g(1, 1) = 0$$

$$\varphi \text{ est un DL connu : } \varphi(t) = \underbrace{1 + t + \frac{1}{2} t^2}_{P_2^\varphi(t)} + o(t^2)$$

Pour g , on procède par méthode du loop

$$g(x, y) = x^2 y - 1 = (x - 1 + 1)^2 (y - 1 + 1) - 1$$

$$= (x - 1 + 1)(y - 1) + (x - 1 + 1)^2 - 1$$

$$= ((x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1)(y - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1 - 1$$

$$= (x - 1)^2 (y - 1) + 2(x - 1)(y - 1) + (y - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)$$

$$= \underbrace{2(x - 1) + (y - 1)}_{\text{degré} = 1} + \underbrace{(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1)}_{\text{degré} = 2} + \underbrace{(x - 1)^2 (y - 1)}_{\text{degré} = 3}$$

degré trop grand

$$\Rightarrow P_2^g(x, y) = 2(x - 1) + (y - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2^{\Phi}(\mathcal{P}_2^{\Phi}(x,y)) = 1 + \left(2(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) \right) + \frac{1}{2} \left(2(x-1) + (y-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) \right)^2$$

$$= \dots = \underbrace{1}_{\text{degré 0}} + \underbrace{2(x-1) + (y-1)}_{\text{degré 1}} + \underbrace{3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2}_{\text{degré 2}}$$

$$+ \underbrace{2(x-1)^3 + 5(x-1)^2(y-1) + 2(x-1)(y-1)^2}_{\text{degré 3}} \quad \text{degré trop grand.}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}(x-1)^4 + 2(x-1)^3(y-1) + 2(x-1)^2(y-1)^2}_{\text{degré 4}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2^{\mathcal{F}}(x,y) = 1 + 2(x-1) + (y-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2$$

Proposition 4.29 (Application du polynôme de Taylor au calcul de limites)

Soit $l \in \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un ouvert contenant $(0,0)$, $h \in \mathbb{N}$, $f \in C^{h+1}(D)$
et son polynôme de Taylor d'ordre h autour de $(0,0)$.

Alors,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|^h} = l \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{P_h(x,y)}{\|(x,y)\|^h} = l.$$

Exemple 4.30:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+y^2) + x^2 - x}{x^2 + y^2}$$

$$\hookrightarrow \|(x,y)\|^2$$

$$\rightarrow h=2.$$

polynôme de Taylor d'ordre 2 de $\sin(x+y^2) + x^2 - x$

[ship

$$P_2(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)}$$

$$\frac{\sin(x+y^2) + x^2 - x}{x^2 + y^2} = 1$$